Modul Geometrie 17. November 2008
Wintersemester 2008-2009
Schmale

Aufgaben

(14/15) Zeigen Sie:

(a) Die im Punkt (e) der Beispiele (Nr. 4 in § 3) im Kontext der affinen Geometrie über Unterkörpern der reellen Zahlen getroffene Definition eines Halbraumes ist unabhängig von der in $\overrightarrow{Y}$ gewählten Basis. Außerdem gilt

(b) Für alle $v, w \in K^n \setminus \overrightarrow{Y}$ gilt:

$$\mathcal{H}_{Y,v} = \mathcal{H}_{Y,w} \text{ oder } \mathcal{H}_{Y,v} = \mathcal{H}_{Y,-w} \ .$$

(c) Seien a, a' zwei verschiedene Punkte außerhalb der affinen Hyperebene Y. Es gilt:

$$\left[\ [a, a'] \cap Y \neq \varnothing \text{ und } a \in \mathcal{H}_{Y,v}\ \right] \quad \Rightarrow \quad a' \in \mathcal{H}_{Y,-v}$$

(d) $\mathcal{H}_{Y,v} = f^{-1}(K_{\geq 0})$ mit einer geeigneten affinen Abbildung $f : K^n \to K$ (affine Form genannt in diesem Sonderfall).

(e) $\mathcal{H}_{Y,v}$ ist konvex.

Die Einschränkung auf den Fall „$K = \mathbb{R}$“ und etwa $n = 3$ macht die Aufgabe nicht schwerer oder leichter. Sie können sich aber gerne auf diesen Fall beschränken.

(16) Diese Aufgabe kann an Stelle der Aufgabenteile (c),(d),(e) aus der Aufgabe (14/15) gewählt werden.

Gegeben seien die Punkte

$$a^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, a^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, a^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, a^{(4)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, a^{(5)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, a^{(6)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ und } x = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Da $x = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i a^{(i)}$ mit $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) = \frac{1}{6} \cdot (1, 1, 1, 1, 1, 1)$, liegt x in der konvexen Hülle der Punktmenge $M = \{a^{(i)} :\ 1 \leq i \leq 6\}$. Stellen Sie den Punkt x durch eine möglichst kurze Konvexkombination aus einigen der $a^{(i)}$ dar.